

1.1 Modélisation de la chaleur au voisinage des solides. Le modèle de Newton

En l'absence de rayonnement thermique, tout au moins en considérant que les phénomènes radiatifs sont négligeables devant les transferts par conduction, la modélisation du flux au voisinage d'un solide $\Sigma : (V, \partial V)$ immobile, immergé dans un fluide repose sur l'hypothèse de la continuité du flux dans le volume V et au voisinage de ∂V . Dans le solide Σ , nous savons que le flux conductif répond à la loi de Fourier. En tout point M_Σ de Σ le vecteur densité de flux associé s'écrit en fonction du champ de température $\theta(M_\Sigma, t)$ dans Σ et de sa conductivité thermique λ_Σ :

$$\varphi^{cond}(M_\Sigma) = -\lambda_\Sigma \mathbf{grad} \theta(M_\Sigma, t)$$

Pour simplifier la modélisation, considérons le cas d'un solide présentant une stratification horizontale de la température (isothermes horizontales parallèles au plan $OxOy$) et une interface solide-fluide plane. Pour tout point M_Σ le vecteur densité de flux s'exprime :

$$\varphi^{cond}(M_\Sigma) = -\lambda_\Sigma \frac{\partial \theta(M_\Sigma, t)}{\partial z} \mathbf{k}$$

Naturellement, cette expression s'applique à tout point M_Σ , au voisinage de l'interface solide-fluide S_i côté Σ :

$$\varphi^{cond}(M_\Sigma) \Big|_{S_i/\Sigma} = -\lambda_\Sigma \frac{\partial \theta(M_\Sigma, t)}{\partial z} \Big|_{S_i/\Sigma} \mathbf{k}$$

Transferts avec un fluide au repos

Dans un fluide au repos, en tout point M_f à l'interface solide-fluide, la vitesse du fluide est nulle. Le transfert thermique à l'interface côté fluide peut être modélisé par un flux conductif, le vecteur densité de flux s'écrivant en fonction du champ de température $\theta(M_f, t)$ dans le fluide et de sa conductivité thermique λ_f , uniforme :

$$\varphi^{cond}(M_f) \Big|_{S_i/f} = -\lambda_f \frac{\partial \theta(M_f, t)}{\partial z} \Big|_{S_i/f} \mathbf{k}$$

En admettant que le flux est continu au voisinage de l'interface solide-fluide (Figure 1), on vérifie :

$$-\lambda_f \frac{\partial \theta(M_f, t)}{\partial z} \Big|_{S_i/f} = -\lambda_\Sigma \frac{\partial \theta(M_\Sigma, t)}{\partial z} \Big|_{S_i/\Sigma}$$

En pratique, tout gradient de température génère des phénomènes de convection sous l'effet de la gravité.

Il faut donc modéliser le transfert thermique à la paroi en prenant en compte ces phénomènes, qu'ils soient naturels ou forcés.

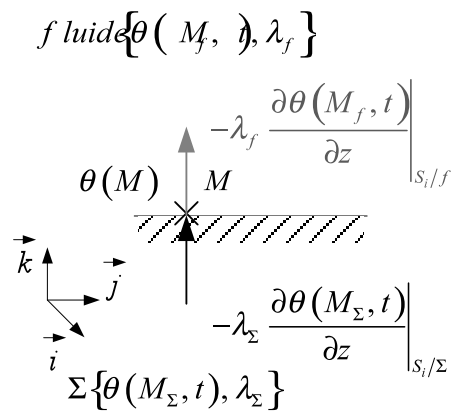


Figure 1 : continuité du flux au voisinage d'une interface solide-fluide

Prise en compte des phénomènes de convection

Le cas le plus général est celui d'un solide en contact avec un fluide en écoulement. Le gradient de température au voisinage de l'interface et les phénomènes de convection sont liés, et le transfert d'énergie associé résulte nécessairement du couplage de phénomènes thermiques et mécaniques :

- le phénomène de *conduction pure*, généré par le gradient de température au voisinage de la paroi ;
- et un phénomène de *convection* généré par le mouvement du fluide, le mouvement étant libre s'il est généré par le gradient de température seul, ou forcé si le fluide est pulsé.

Ce couplage de phénomènes thermiques et mécaniques est modélisé par un **flux conducto-convectif**.

L'analyse du champ de température dans l'écoulement horizontal d'un fluide entre deux plaques planes horizontales permet, sous certaines conditions, de proposer un modèle proche des observations expérimentales. En effet, l'expérience montre que, pour un écoulement permanent, et si la température de chaque plaque est maintenue constante (θ_1 en $z=0$ et $\theta_2 < \theta_1$ en $z=e$ sur la Figure 2), en se plaçant suffisamment en loin des extrémités en contact avec des conditions aux limites, l'espace entre les plaques est divisé en trois zones :

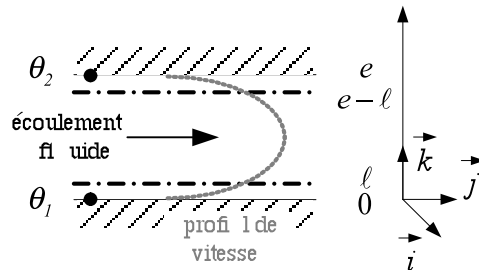


Figure 2 : champ de vitesse dans un écoulement horizontal entre deux plaques planes horizontales

- une zone centrale, au cœur de l'écoulement, où les échanges thermiques sont maximums, de sorte que la température tend vers une valeur moyenne $\bar{\theta}_m$;
- et deux zones laminaires au voisinage des plaques, où la vitesse d'écoulement est très faible (jusqu'à être nulle à l'interface solide-fluide) sous l'effet des frottements visqueux.

Proposition d'un modèle de transfert linéaire au voisinage des parois. Modèle de Newton

Dans ces zones laminaires d'épaisseur l , la conductivité du fluide λ_f peut être considérée uniforme (cela dépend des gradients de température) et le transfert thermique en surface ($z=0$ et $z=e$) suit une loi linéaire. **Le régime est permanent.**

Le flux conducto-convectif en surface est modélisé comme un flux conductif et on retrouve, dans les régions $[0; l]$ et $[e-l; e]$ l'expression du vecteur densité de flux modélisé à l'interface :

$$\varphi^{cc} (M_f) \Big|_e = -\lambda_f \frac{d\theta (M_f)}{dz} \Big|_e \mathbf{k}$$

Le transfert étant linéaire, le gradient s'écrit simplement :

$$\text{pour } z \in [0; l], \frac{d\theta (M_f)}{dz} \Big|_{[0; l]} = \frac{\bar{\theta}_m - \theta_1}{l} ;$$

$$\text{et pour } z \in [e-l; e] \frac{d\theta (M_f)}{dz} \Big|_{[e-l; e]} = \frac{\theta_2 - \bar{\theta}_m}{l} .$$

Sachant que le flux est dirigé des zones les plus « chaudes » vers les plus « froides », Newton a défini un coefficient conducto-convectif noté h [$W.K^{-1}.m^{-2}$] pour modéliser le flux conducto-convectif au voisinage de la paroi d'un solide immergé dans un fluide au repos ou au voisinage

d'une paroi léchée par un fluide en mouvement. En remplaçant les expressions des gradients ci-dessus dans l'expression de $\varphi^{cc}(M_f)$, on obtient :

$$\varphi^{cc}(M_f) \Big|_{[0;\ell]} = h(\theta_1 - \bar{\theta}_m) \mathbf{k} \text{ pour } z \in [0;\ell];$$

et $\varphi^{cc}(M_f) \Big|_{[e-\ell;e]} = h(\bar{\theta}_m - \theta_2) \mathbf{k} \text{ pour } z \in [e-\ell;e].$

La confrontation avec des relevés expérimentaux confirme que, dans la veine centrale la température en tout point tend vers une température moyenne $\bar{\theta}_m$, et que les profils dans les zones laminaires suivent de près un modèle linéaire (Figure 3).

Dans la veine centrale, la température étant uniforme, il n'y a pas de gradient de température, donc pas d'échange d'énergie thermique. Les gradients de température s'en trouvent augmentés au voisinage des plaques.

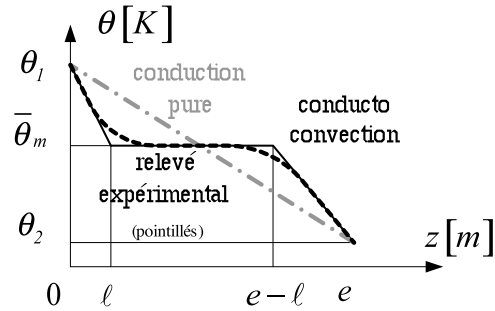


Figure 3 : zones des champs de température dans l'espace (justification expérimentale du modèle conducto-convectif)

En l'absence d'écoulement, dans les mêmes conditions thermiques, pour un même gradient de température entre les plaques, le transfert est modélisé en tout point M par un flux conductif pur de vecteur densité :

$$\varphi^{cond}(M) = -\lambda_f \frac{\theta_2 - \theta_1}{e} \mathbf{k}$$

On retrouve un profil de température linéaire avec une pente moins importante $\left(\frac{\lambda_f}{e} < \frac{\lambda_f}{\ell} \right)$.

En pratique, les coefficients conducto-convectifs h sont évalués à partir d'informations expérimentales. On peut néanmoins préciser des ordres de grandeurs suivant la nature du fluide et les conditions expérimentales (Tableau 1). Plus la vitesse d'écoulement augmente, plus la veine centrale occupe d'espace entre les plaques, et plus l'épaisseur des couches laminaires se réduit : il en résulte une *augmentation de l'intensité du flux surfacique avec la vitesse d'écoulement* qui se traduit par une augmentation du coefficient de conduction-convection avec la vitesse :

$$v(M) \text{ augmente} \Rightarrow e \text{ diminue} \Rightarrow \frac{\lambda_f}{e} \text{ augmente}$$

conditions expérimentales	Nature du fluide	$h [W.K^{-1}.m^{-2}]$	
convection naturelle	gaz	5	30
	liquide aqueux	100	1 000
convection forcée	gaz	10	300
	liquide visqueux	50	1 700
	liquide aqueux	300	12 000

Tableau 1 : quelques valeurs de coefficients conducto-convectifs

Les modèles de flux conductif et conducto-convectif permettent de développer les termes de transferts apparaissant dans le bilan d'énergie en fonction des gradients de température et des propriétés des systèmes modélisés.

Exemple :

Considérons un plan horizontal $\Sigma : (V, S)$, caractérisé par les propriétés thermodynamiques (ρ, C_V, λ) , sur lequel repose ou s'écoule un fluide à la température ambiante θ_{amb} uniforme. Si la température en tout point M_f de S à l'interface solide-fluide est supérieure à celle de l'ambiance, et si le transfert à la paroi est modélisé par un flux conducto-convectif de coefficient h , le flux conducto-convectif apparaît comme un flux sortant (qui doit être soustrait du bilan) :

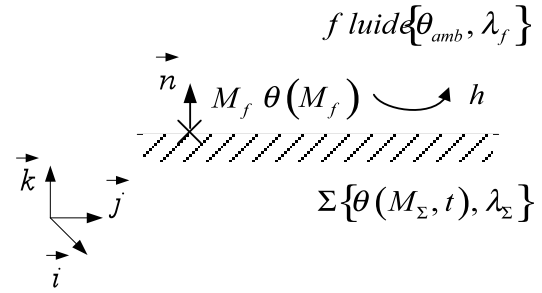


Figure 4 : bilan d'énergie pour un plan horizontal l'éché par un fluide

$$\Phi_S^{cc} = -\Phi^{cc} = -\int_{M \in \partial V} h(\theta(M_f, t) - \theta_{amb}) \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} dS(M)$$

Le flux conductif pur est modélisé comme un flux sortant (§ 2.1), dans le bilan c'est aussi un flux soustrait :

$$\Phi_V^{cond} = -\Phi_{\text{sortant}/S}^{cond} = -\int_{M \in \partial V} -\lambda \mathbf{grad} \theta(M, t) \cdot \mathbf{n} dS(M)$$

Ainsi :

$$\int_{M \in V} \rho C_V \frac{\partial \theta(M, t)}{\partial t} dV = \int_{M \in V} p^* dV + \Phi_V^{cond} + \Phi_S^{cc}$$

s'écrit :

$$\int_{M \in V} \rho C_V \frac{\partial \theta(M, t)}{\partial t} dV = \int_{M \in V} p^* dV + \int_{M \in \partial V} \lambda \mathbf{grad} \theta(M, t) \cdot \mathbf{n} dS(M) - \int_{M \in \partial V} h(\theta(M_f, t) - \theta_{amb}) \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} dS(M)$$

En l'absence de source/puits interne, il reste :

$$\int_{M \in V} \rho C_V \frac{\partial \theta(M, t)}{\partial t} dV = \int_{M \in \partial V} \lambda \mathbf{grad} \theta(M, t) \cdot \mathbf{n} dS(M) - \int_{M \in \partial V} h(\theta(M, t) - \theta_{amb}) \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} dS(M)$$

La résolution du bilan d'énergie repose sur la résolution d'équations différentielles. Mathématiquement, ces équations admettent une infinité de solution. Dans le cadre de la modélisation d'un système physique, la détermination d'une solution rendant compte des observations expérimentales nécessite la connaissance des conditions (les causes) qui déterminent l'évolution du système.

1.2 Prise en compte des conditions expérimentales

Les conditions expérimentales qui déterminent la solution du bilan d'énergie doivent décrire l'état du système modélisé à l'instant initial $t_i = 0$, et les propriétés du système aux frontières.

La condition initiale

Lorsqu'un système $\Sigma : (V, S)$ est étudié en régime variable, la détermination d'un modèle qui rend compte de son état thermique à tout instant t repose sur la connaissance du champ de température $\theta(M, 0) \forall M \in V$.

Les propriétés aux frontières (conditions aux limites)

En régime variable comme en régime permanent, la description des propriétés aux frontières d'un système solide $\Sigma : (V, S)$ peut invoquer des conditions de trois types :

- les *conditions intensives*, dites conditions de Dirichlet, qui définissent une température imposée en un lieu (un point, surface ou une région de l'espace) ;
 $\forall M \in L,$
 $\theta(M, t) = \theta_L(t)$ en régime variable
 $\theta(M, t) = \theta_L$ en régime permanent
- les *conditions extensives*, dites conditions de Neumann, qui définissent une densité surfacique de flux imposé en un lieu (une surface en général) ;
 $\forall M \in L$
 $q^{cond}(M) = -\lambda \left(\frac{d\theta}{dx} \right)_M$
- et les *conditions mixtes*, dites conditions de Fourier, qui énoncent la continuité de la densité de flux à l'interface entre le solide et un fluide à température constante θ_∞ dont les propriétés d'échange sont caractérisées par le coefficient conducto-convectif h (transfert linéaire à la frontière).
 $\forall M \in \text{interface},$
 $-\lambda \left(\frac{d\theta}{dx} \right)_M = h(\theta(M) - \theta_\infty)$

A l'interface entre eux solide de nature différente, caractérisés par les conductivités thermiques λ_1 et λ_2 , si le contact est parfait la condition à l'interface s'écrit simplement :

$$\lambda_1 \left(\frac{d\theta}{dx} \right)_{M \in \text{interface}} = \lambda_2 \left(\frac{d\theta}{dx} \right)_{M \in \text{interface}}$$

Si le contact est imparfait, il est intéressant de le modéliser comme un assemblage de zones hétérogènes (des zones multicouches, des zones comprenant une lame d'air, *etc.*), et d'affecter à chaque zone un pourcentage de la surface totale de l'interface solide-solide. Les conditions aux limites reposent alors sur la définition de surfaces isothermes, et sur l'hypothèse que le flux qui traverse l'interface de contact est la somme des flux qui traversent les zones hétérogènes (*cf.* TD).